Morse position of knots and closed incompressible surfaces

小沢　誠　（駒澤大学文学部自然科学教室）

K を S^3 内の結び目とし、$h : S^3 \to \mathbb{R}$ を包含写像 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ と $(x, y, z, w) \mapsto w$ で定義される高さ関数 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ の合成写像とする。K が h に関して **Morse position** であるとは、h の K への制限が Morse 関数であるときをいう。$a_0, \dots, a_n$ を K の臨界点で、対応する臨界値 $t_i = h(a_i)$ が全ての i に対して $t_{i-1} < t_i$ を満たすものとする。正則値 $s_i \in (t_{i-1}, t_i)$ に対して、$P_i = h^{-1}(s_i)$ を a_{i-1} と a_i の間の **level sphere** という。K の **width** を $w(K) = \sum_{i=1}^{n} |P_i \cap K|$ で定義する。K が **thin position** であるとは、$w(K)$ が K のイソトピーで最小のときをいう。a_{i-1} と a_i の間の level sphere P_i が **thin** であるとは、a_{i-1} が極大点であり a_i が極小点であるときをいう。同様に、a_{i-1} と a_i の間の level sphere P_i が **thick** であるとは、a_{i-1} が極小点であり a_i が極大点であるときをいう。a_{i-1} と a_i の間の各 thick level sphere P_i に関して、K の **thick region** を十分小さい正の実数 ϵ に対して $h^{-1}([t_{i-1} + \epsilon, t_i - \epsilon])$ で定める。thick region の S^3 内の残りの各領域を K の **thin region** という。M_{thin} を全ての thin region の非交和とし、M_{thick} を全ての thick region の非交和とする。

F を K と交わらないか K と横断的に交わる S^3 内の閉曲面とする。F が h に関して **Morse position** にあるとは、h の F への制限が Morse 関数であるときをいう。K と F の臨界点は互いに交わらないと仮定する。更に、次の条件を満たすとき、F は K **に関して Morse position** にあるという。

(1) F は h に関して Morse position にある。
(2) F と K は一般の位置にあり、$F \cap K$ は M_{thick} に含まれる。
(3) F の全ての極大点と極小点は M_{thin} に含まれ、全ての鞍点は M_{thick} に含まれる。

M を 3 次元多様体、T を M に適切に埋め込まれた 1 次元多様体とし、F を M に適切に埋め込まれた曲面で、T と交わらないか T と横断的に F の内部で交わるとする。F の (M, T) 内での **isotopy** は、全ての $t \in [0, 1]$ に対して、$\phi_t(F)$ と T が一般の位置にあると仮定する。F が (M, T) 内で **incompressible** であるとは、$M - T$ 内の任意のディスク D で $D \cap F = \partial D$ を満たすものに対し、$F - T$ 内のディスク D' で $\partial D' = \partial D$ を満たすものが存在するときをいう。F が T と交わらないディスクの場合、F が (M, T) 内で **incompressible** であるとは、$\partial M - \partial T$ 内の任意のディスク D で $\partial D = \partial F$ を満たすものに対し、$F \cup D$ が $M - T$ 内の 3 次元球体の境界でないときをいう。F が T と交わらない 2 次元球面の場合、

F が (M,T) 内で **incompressible** であるとは、F が $M-T$ 内の 3 次元球体の境界でないときをいう。次に、F が (M,T) 内で **meridionally incomperssible** であるとは、M 内の任意のディスク D で、$D\cap F=\partial D$ を満たし、D の内部で T と 1 点で交わるものに対し、F 内のディスク D' で $\partial D'=\partial D$ を満たすものが存在し、組 $(D\cup D',(D\cup D')\cap T)$ が (M,T) 内の自明な組 (3 次元球体, アーク) の境界となるときをいう。F が T と 1 点で交わるディスクの場合、F が (M,T) 内で **meridionally incompressible** であるとは、∂M 内の任意のディスク D で $\partial D=\partial F$ を満たすものに対し、組 $(F\cup D,(F\cup D)\cap T)$ が (M,T) 内の自明な組 (3 次元球体, アーク) の境界とならないときをいう。F が T と 2 点で交わる 2 次元球面の場合、F が (M,T) 内で **meridionally incompressible** であるとは、F が (M,T) 内の自明な組 (3 次元球体, アーク) の境界とならないときをいう。

$K\subset S^3$ を h に関して Morse position にある結び目とし、$F\subset S^3$ を K に関して Morse position にある閉曲面とする。更に、次の条件を満たすとき、F は K **に関して (meridionally) essential Morse position** であるという。

(4) $F\cap M_{thin}$ と $F\cap M_{thick}$ の各成分は、それぞれ $(M_{thin},K\cap M_{thin})$ と $(M_{thick},K\cap M_{thick})$ 内で incompressible (かつ meridionally incompressible) である。

定理. $K\subset S^3$ を h に関して Morse position にある結び目とし、$F\subset S^3$ を K と交わらないか K と横断的に交わる閉曲面で、(S^3,K) 内で incompressible (かつ meridionally incompressible) であるとする。このとき、次のいずれかを満たすように F を isotope できる。

1. F は thin level sphere である。
2. F は K に関して (meridionally) essential Morse position にある。

参考文献.

1 M. Ozawa, *Morse position of knots and closed incompressible surfaces*, preprint available in http://arxiv.org/abs/math.GT/0503375.