

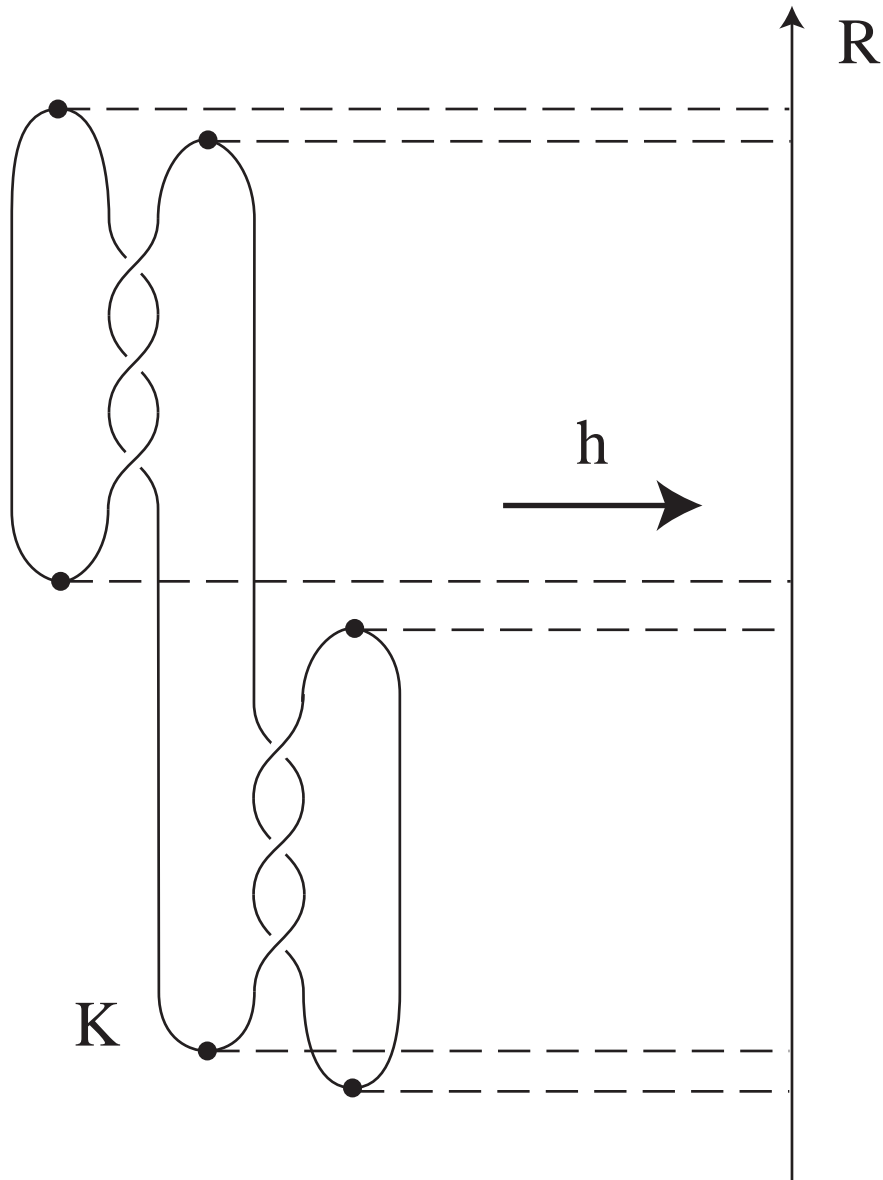
Morse position of knots and closed incompressible surfaces

小沢 誠（駒澤大学）

2005年9月20日

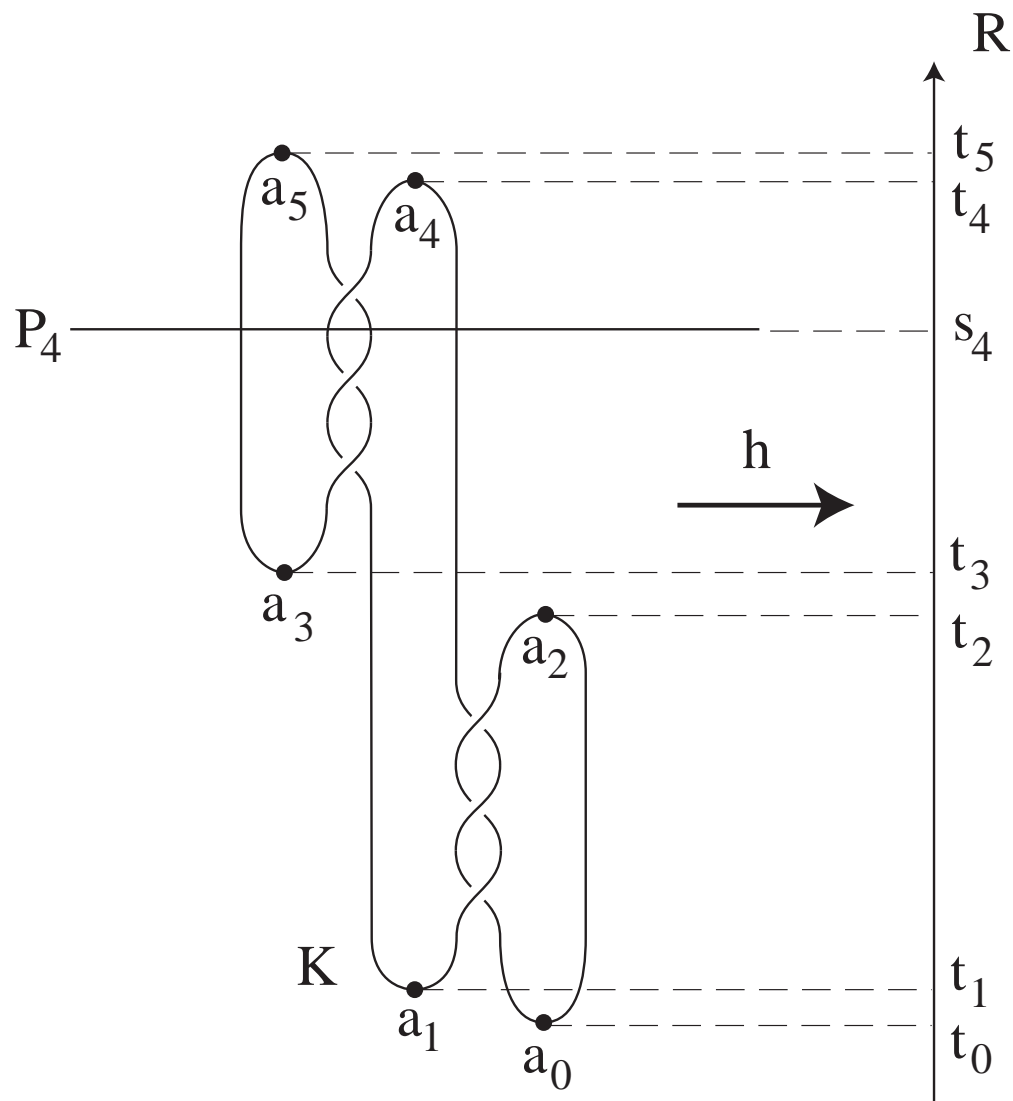
定義

Morse 関数 $h : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ の結び目 $K \subset S^3$ への制限が Morse 関数であるとき、 K は h に関して **Morse position** にあるという。



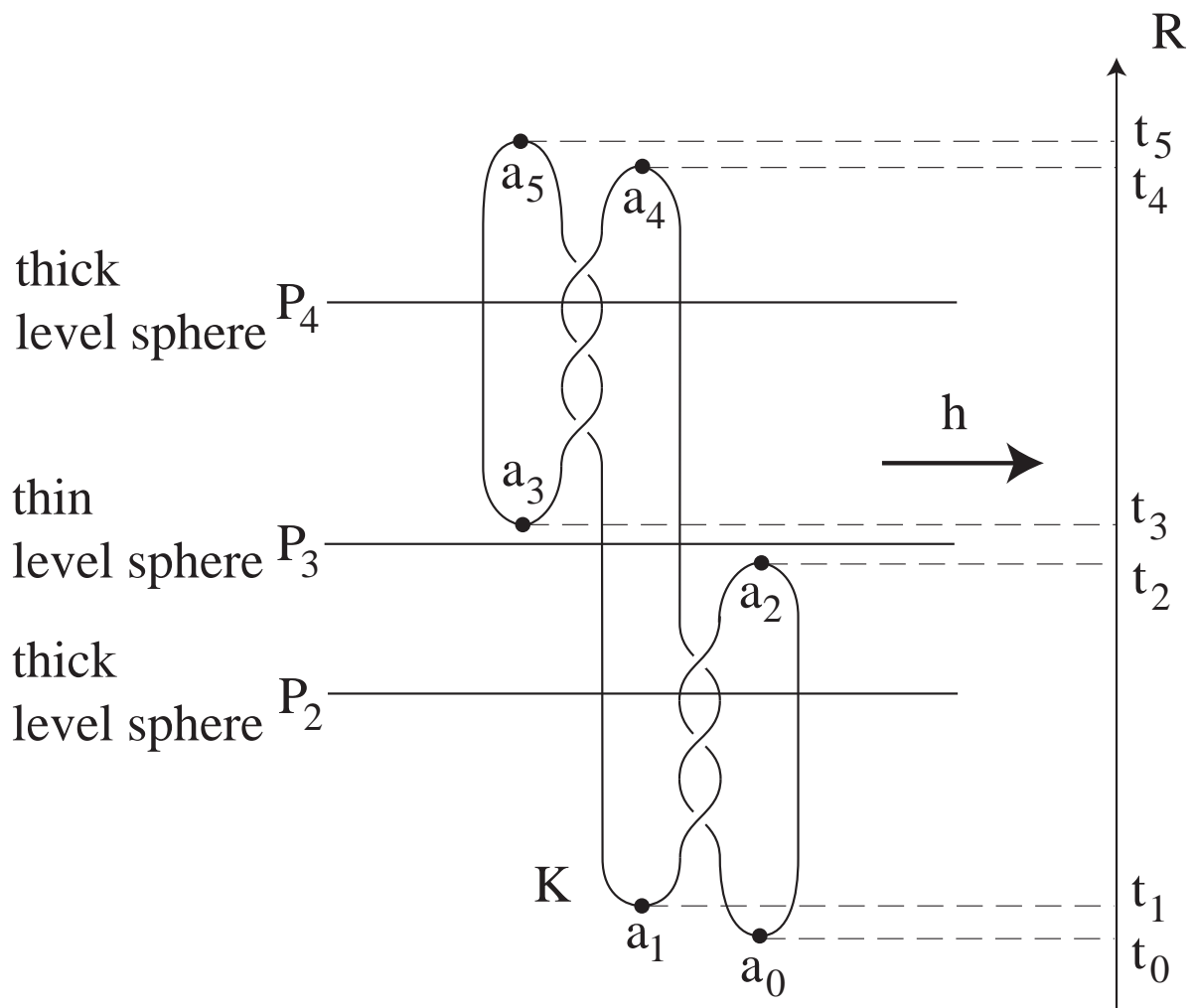
a_0, \dots, a_n を K の臨界点で、対応する臨界値 $t_i = h(a_i)$ が、各 i に対して $t_{i-1} < t_i$ を満たすものとする。

正則値 $s_i \in (t_{i-1}, t_i)$ に対して、 $P_i = h^{-1}(s_i)$ を a_{i-1} と a_i の間の **level sphere** という。



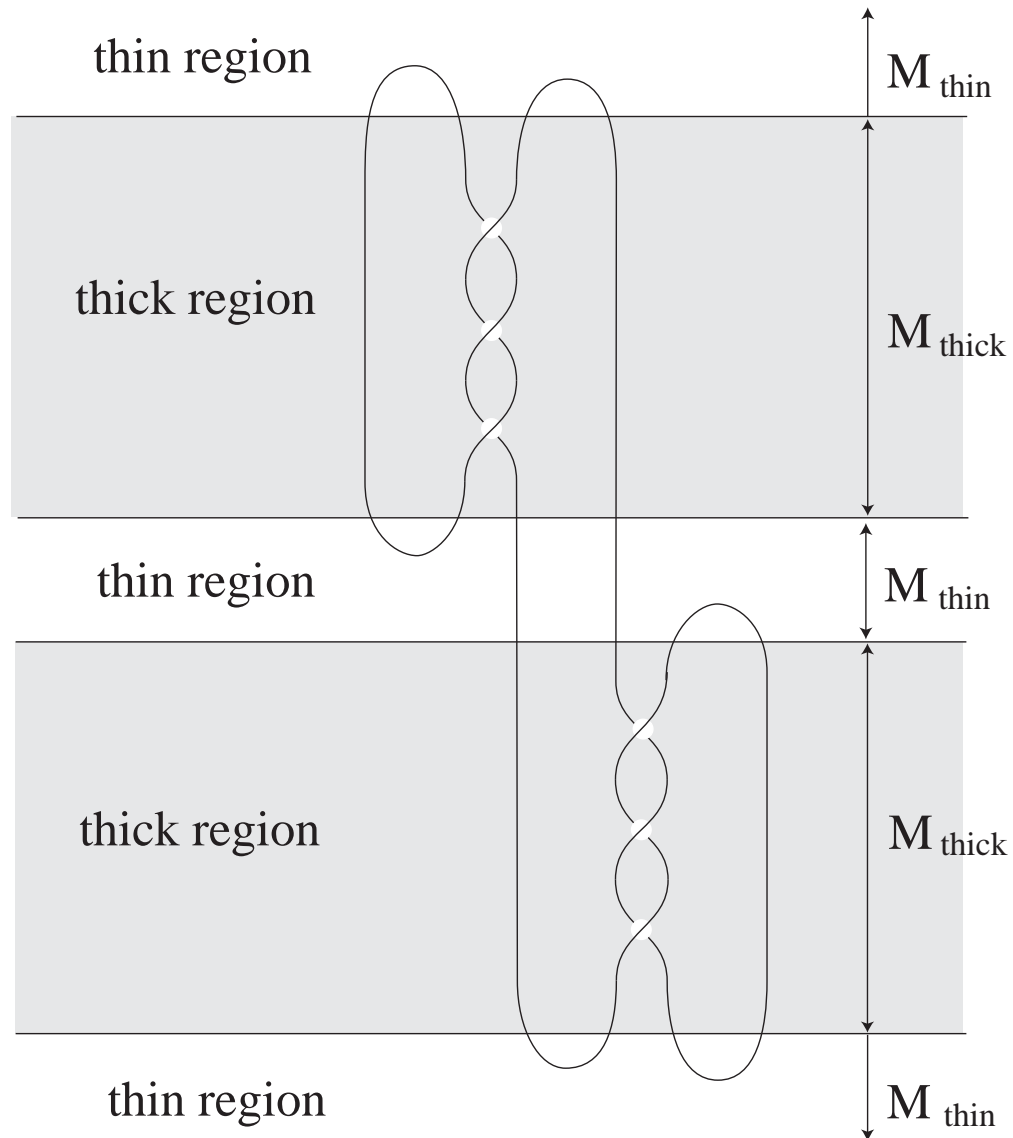
a_{i-1} が極大点で a_i が極小点であるとき、 P_i を **thin level sphere** という。

a_{i-1} が極小点で a_i が極大点であるとき、 P_i を **thick level sphere** という。



各 thick level sphere P_i に対して、**thick region** を $h^{-1}([t_{i-1} + \epsilon, t_i - \epsilon])$ で定める。

全ての thick region の和を M_{thick} とし、 M_{thick} の残りの各成分を **thin region** と呼び、和を M_{thin} で表す。



F を S^3 内の閉曲面で、 K と交わらないか、又は K と横断的に交わるものとする。

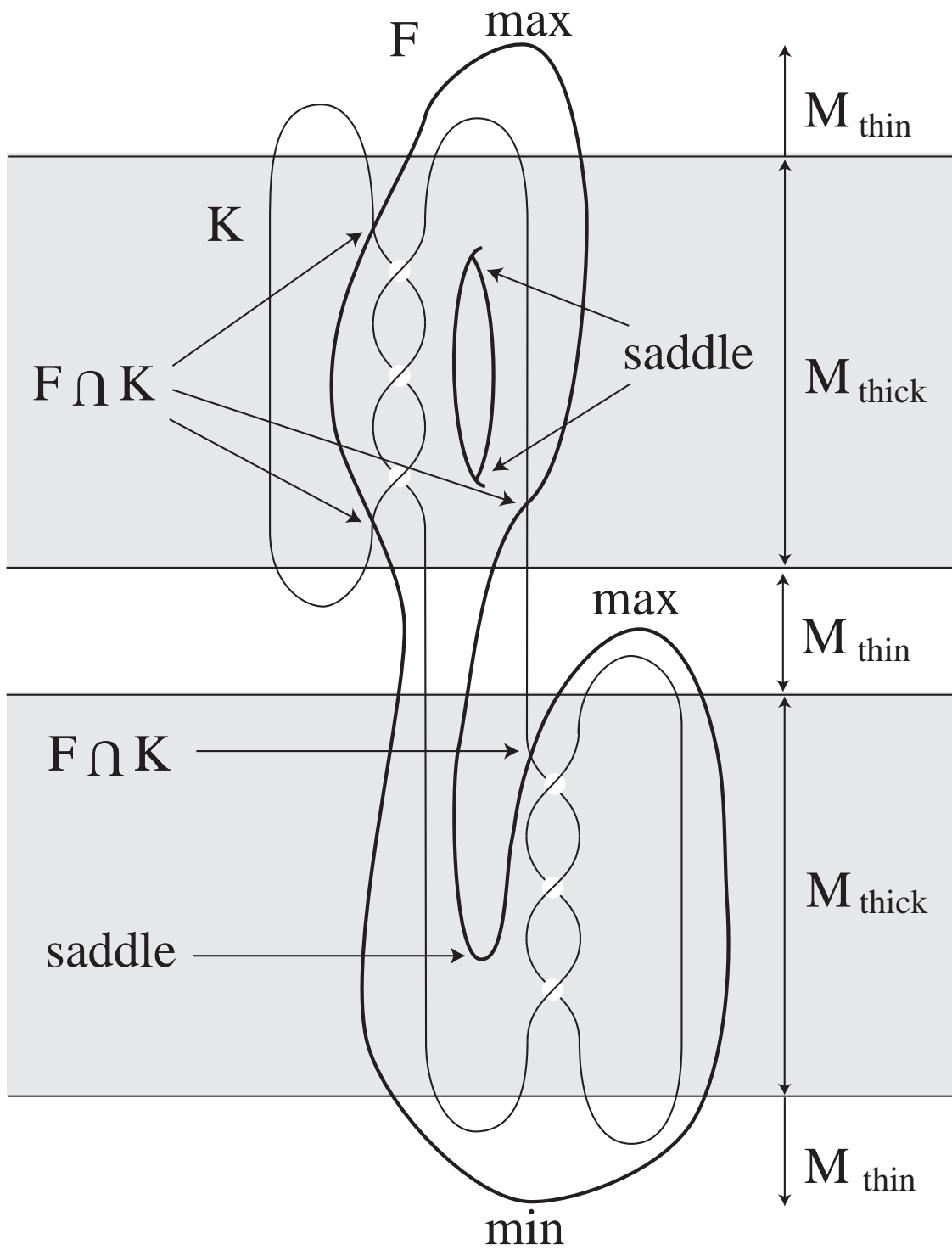
定義

F が次を満たすとき、 K に関して Morse position にあるという。

1. $h : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ の F への制限が Morse 関数
2. F と K は一般の位置にあり、 $F \cap K \subset M_{thick}$
3. F の全ての極大点と極小点は M_{thin} に含まれ、全ての鞍点は M_{thick} に含まれる。

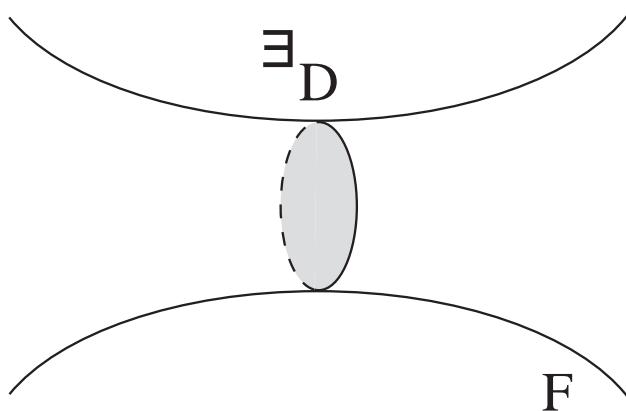
任意の閉曲面は、 K に関して Morse position にイソトープできる。

また、 F が K に関して essential Morse position にあるならば、 $F \cap M_{thin}$ は disk か vertical な annulus から成る。

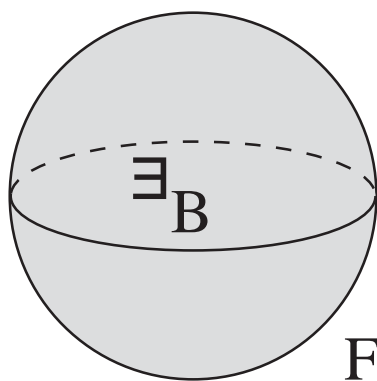


M を3次元多様体、 T を M 内に適切に埋め込まれた1次元多様体、 F を M 内に適切に埋め込まれた曲面で T と交わらないか又は T と横断的に F の内部で交わるものとする。

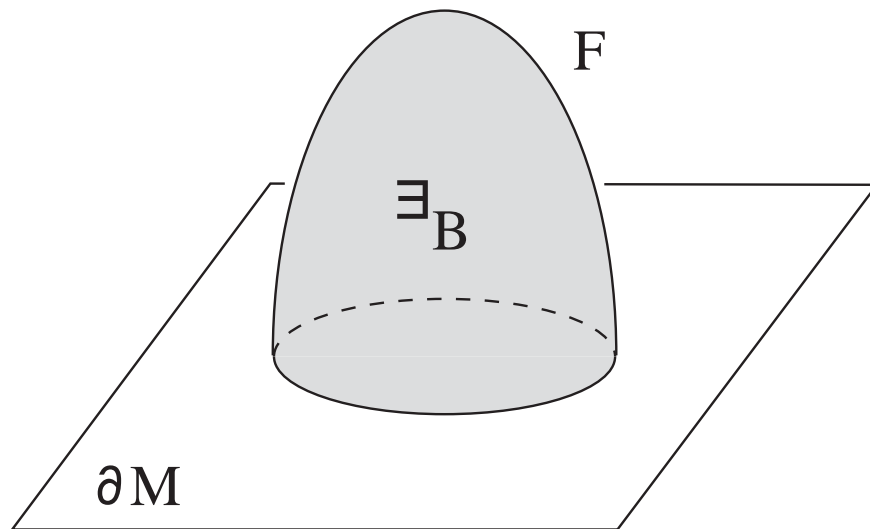
F が (M, T) 内で **compressible** であるとは、



F が球面の場合、

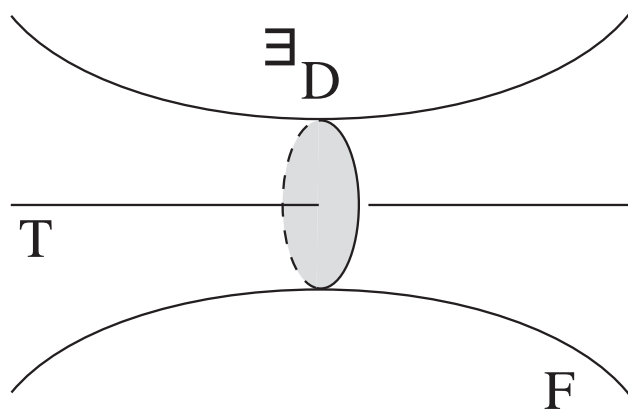


F がディスクの場合、

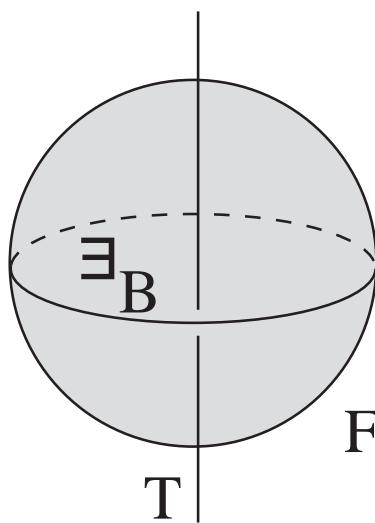


F が (M, T) 内で compressible でないとき、**incompressible** という。

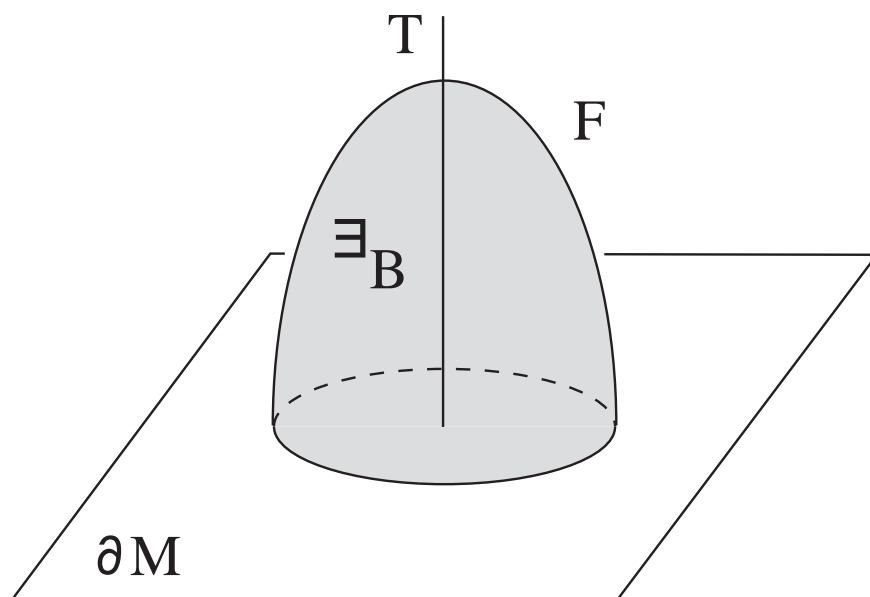
F が (M, T) 内で **meridionally compressible** であるとは、



F が T と2点で交わる球面の場合、



F が T と1点で交わるディスクの場合、



F が (M, T) 内で meridionally compressibleでないとき、**meridionally incompressible**という。

$K \subset S^3$ を h に関して Morse position にある結び目とし、 $F \subset S^3$ を K に関して Morse position にある閉曲面とする。

— 定義 (essential Morse position) —

F が次を満たすとき、 K に関して **essential Morse position** にあるという。

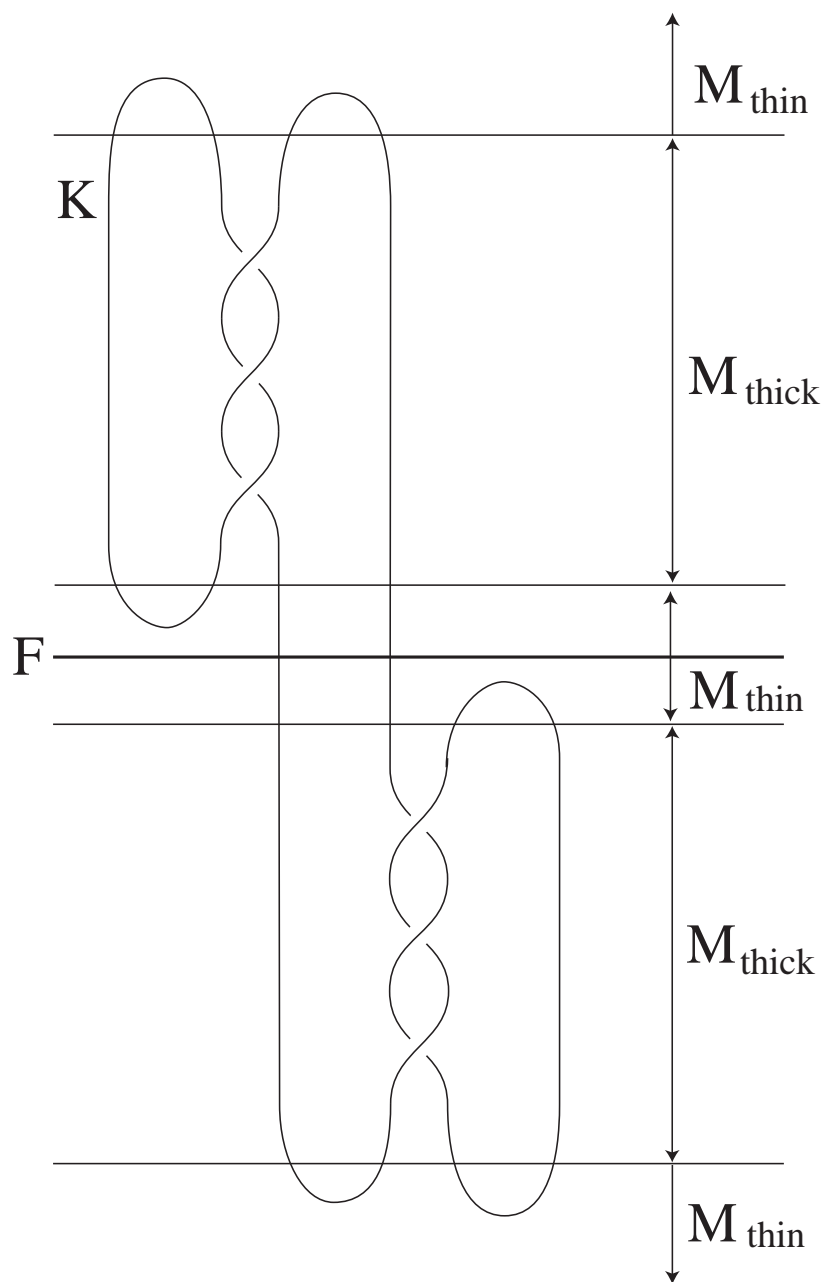
4. $F \cap M_{thin}$ 及び $F \cap M_{thick}$ の各成分が、それぞれ $(M_{thin}, K \cap M_{thin})$ 及び $(M_{thick}, K \cap M_{thick})$ で incompressible かつ meridionally incompressible

定理

$K \subset S^3$ を h に関して Morse positionにある結び目とし、 $F \subset S^3$ を K と交わらないか、又は K と横断的に交わる閉曲面で、 (S^3, K) 内で incompressible かつ meridionally incompressible であるとする。この時、 F は次のいずれかのようにイソトープできる。

1. F は thin level sphere、又は
2. F は K に関して essential Morse position

例 1. F は thin level sphere



例2. F は K に関して essential Morse position

